This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

24176
HN 4NPY /

KF 24176

HARVARD COLLEGE
LIBRARY

THE GIFT OF
HAVERFORD COLLEGE LIBRARY
HAVERFORD, PENNSYLVANIA

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Krystallographische Untersuchungen

an

homologen und isomeren Reihen.

Eine von der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien mit dem A. Freiherrn von Baumgartner'schen Preise gekrönte, durch einen methodologischen Theil vermehrte Schrift

von

Dr. Aristides Brezina

Custos am k. k. mineralogischen Hof-Cabinete, Privatdocent an der Universität Wien.

I. Theil.

Methoden.

Mit einer lithogr. Tafel und 93 in den Text gedruckten Holzschnitten.

WIEN.

Druck und Verlag von Carl Gerold's Sohn.

1884.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Krystallographische Untersuchungen

an

homologen und isomeren Reihen.

Eine von der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien mit dem A. Freiherrn von Baumgartner'schen Preise gekrönte, durch einen methodologischen Theil vermehrte Schrift

von

Dr. **Aristides Brezina**

Custos am k. k. mineralogischen Hof-Cabinete, Privatdocent an der Universität Wien.

I. Theil.

Methoden.

Mit einer lithogr. Tafel und 93 in den Text gedruckten Holzschnitten.

WIEN.

Druck und Verlag von Carl Gerold's Sohn.

1884.

Digitized by Google

METHODIK

DER

KRYSTALL-BESTIMMUNG.

Von

Dr. Aristides Brezina

Custos am k. k. mineralogischen Hof-Cabinete, Privatdocent an der Universität Wien.

Mit einer lithogr. Tafel und 93 in den Text gedruckten Holzschnitten.

WIEN.

Druck und Verlag von Carl Gerold's Sohn.

1884.

Digitized by Google

KF 24176
Ger 7658.64

HARVARD COLLEGE
Apr. 6. 1936
LIBRARY

Haverford College library

Alle Rechte vorbehalten.

Digitized by Google

Vorwort zum ersten Theil.

Wer es versucht hat, sich über gewisse physikalische Fragen aus den gangbarsten Lehrbüchern zu unterrichten, etwa über Einrichtung und Theorie des astronomischen Fernrohres, das doch eines der wichtigsten und meist gebrauchten Instrumente ist, der wird zu seiner Enttäuschung nicht nur sehr wenig, sondern auch meist unrichtiges gefunden haben. Man lässt die Brennpunkte von Objectiv und Ocular zusammenfallen, unbekümmert darum, dass dann unter tausend Menschen kaum einer durch ein solches Fernrohr ein Bild erhielte; man gibt nirgends eine Berücksichtigung des Huyghens'schen Oculares, obwohl durch seine Einführung die sämmtlichen Formeln eine vollständige Umänderung erfahren; man verfolgt die Strahlen nicht bis zur Retina des Auges, obwohl erst dadurch eine richtige Vorstellung von den Verhältnissen der Fernrohrwirkung, der Vergrösserung, der Schärfe u. s. w. erzielt wird. Aehnlich geht es mit anderen Fragen; die Anwendung der Gesetze der Wahrscheinlichkeit auf die Discussion von Beobachtungen und auf die Ableitung der sichersten Werthe aus denselben ist zwar etwas besser behandelt, aber hier sind die richtigen Darstellungen in verschiedenen

Digitized by Google

astronomischen Werken zerstreut, welche dem Krystallographen selten zugänglich sind. Ich glaubte deshalb meinen Fachgenossen durch eine Darstellung solcher Hilfsdisciplinen nützlich zu sein.

Andererseits hatte ich, schon seitdem ich selbstständige krystallographische Untersuchungen anstellte, mein Augenmerk auf die Aufsuchung der kürzesten und sichersten Methoden gerichtet, welche ich sodann sowohl bei meinen eigenen Arbeiten, als auch seit einer Reihe von Jahren im seminaristischen Unterrichte erprobt und umgestaltet habe. Dabei habe ich einen doppelten Zweck im Auge gehabt: einestheils sollten die Methoden der Messung der Krystallwinkel, der Discussion dieser Messungen, der graphischen Darstellung und der mit Hilfe derselben ausgeführten Berechnung in einer einfachen, natürlich verknüpften Kettenfolge dargestellt werden, in welcher die einzelnen Operationen sich in der nämlichen Folge aneinander reihen, in welcher sie bei der wirklichen Untersuchung vorgenommen werden; andererseits sollte auch besonders dem Anfänger das ziellose Herumtasten erspart werden, das namentlich dann eintritt, wenn für jede Bestimmung mehrere Wege gegeben sind, von denen in Wirklichkeit doch meist nur einer bequem gangbar zu sein pflegt; ich habe deshalb bei allen Rechnungen den Ansatz bis auf die unbedeutendste Verrichtung schematisch dargestellt und wenigstens ein Beispiel vollständig durchgeführt; denn die Erfahrung lehrt, dass eine Arbeit häufiger unterbleibt oder Zeit vergeudet wird, weil man über den passenden Beginn einer Rechnung rathlos ist, als wegen Unkenntniss wichtigerer Sätze, welche man viel häufiger angegeben findet. Hiebei habe ich ein besonderes Augenmerk auf die Behandlung solcher Gebiete gerichtet, welche in anderen krystallographischen Wer-

Digitized by Google

ken minder eingehend dargestellt sind; so muss ich bezüglich der äusserst wichtigen Capitel über die Folgerungen aus dem Bestehen gewisser specieller Winkelwerthe (Isogonie) und über die Symmetrie von Ebenen, Geraden und Punkten auf das Lehrbuch der Krystallographie von V. von Lang (§§. 17—25 und 31—34) verweisen. Ebenso wurde alles auf die Anordnung der Theilchen in Krystallen bezügliche vermieden, da in dem kürzlich erschienenen Traité de cristallographie von Mallard diese Gebiete in den Vordergrund gestellt werden; umsomehr, da auch der zweite Band des letztgenannten Werkes gerade solche Theile der physikalischen Krystallographie behandeln wird, welche in der Fortsetzung des vorliegenden Werkes nicht besprochen werden. Ich habe gewöhnlich am Ende der Paragraphe einige Hinweise auf zusammenfassende Arbeiten gegeben, wodurch jedoch weder eine vollständige Angabe der Literatur, noch das Feststellen der Priorität beabsichtigt ist.

Endlich gab auch die Bewerbung um den von der kaiserlichen Akademie ausgeschriebenen Preis Veranlassung, solche Krystalle in den Kreis der Untersuchung zu ziehen, welche man sonst ihrer Unbeständigkeit, Kleinheit oder sonstigen unvollkommenen Ausbildung wegen kaum zu bearbeiten pflegt, deren Studium jedoch für mich wegen ihrer Stellung in wichtigen Reihen geboten war; dadurch wurden mancherlei Vorkehrungen nöthig, welche zwar selten gebraucht werden, dann aber meist rasch zur Hand sein sollen, so dass ihre Mittheilung ebenfalls von Nutzen sein dürfte.

So schlossen sich die Theile zu einem abgerundeten Lehrgebäude zusammen, von dem ich übrigens glaube erwähnen zu müssen, dass dieser erste Theil der Beurtheilung der kaiserlichen Akademie nicht unterbreitet war; in der vor-

Digitized by Google

gelegten Preisbewerbungsschrift waren die angewendeten Methoden nur kurz angedeutet.

Meinem Verleger spreche ich für sein liberales Entgegenkommen bei Uebernahme des Verlages und während der ungewöhnlich langwierigen Herstellung des schwierigen Satzes meinen verbindlichsten Dank aus, sowie ich auch seiner altbewährten Officin für die sorgfältige Ausführung des Werkes aufrichtig verbunden bin.

Endlich hat mich Herr Mechaniker Ernest Schneider durch Ueberlassung einer Reihe von Zeichnungen des Goniometers und seiner Bestandtheile zu Dank verpflichtet.

Wien, im Juli 1883.

A. Brezina.

Digitized by Google

Inhalts-Verzeichniss.

	Formel	Figur	Seite
Erster Theil. Methoden.			
I. Winkelmessung.			
1. Winkel zweier Ebenen	—	1	1
2. Carangeau'sches Anlegegoniometer	—	—	2
3. Haidingers graphische Methode	—	—	2
4. Messung durch Verschwindenlassen der Flächen	—	—	2
5. „ „ Reflexion	—	2	2
6. Dioptrische Formeln. Definitionen	—	3, 4	3
7. „ „ Construction des Bildes zum Gegenstande	—	5	5
8. „ Einfallender Strahl gegeben, gebrochener gesucht	—	6	6
9. „ zu je einem Punkte des ersten und letzten Mediums den durch beide gehenden Strahl zu finden	—	—	6
10. „ Weitere Fundamentalebenen und -Punkte	1	7	7
11. „ Grundformeln	2	8	8
„ „ Druckfehler	—	—	324
12. „ Gang der Objecte und ihrer Bilder	3	—	9,10,11
13. „ Eine brechende Fläche	4	9	9
14. „ Zwei brechende Flächen (Linse)	5, 5 *a*	—	12
15. „ Zwei Systeme brechender Flächen	6	—	13
16. Goniometer mit zwei Fernrohren	—	10	13
17. „ Gang der Lichtstrahlen	—	—	14
18. „ Formeln für den Gang der Strahlen.	—	—	15
19. „ Berücksichtigung der deutlichen Sehweite	7—9, VIII, IX	—	16
20. „ Drehung der spiegelnden Krystallfläche. Empfindlichkeit	10—12, X—XII	11	20
21. „ Gesichtsfeld in Bildgrössen- und angularem Masse	13,14, XIII, XIV	—	22
22. „ Lichtscheibe. Bild- u. angulare Grösse	15,16, XV, XVI	—	22
23. „ Scheinbare Bildgrössen	17, XVII	—	23
24. „ Lichtmenge und Helligkeit	18, 19, XIX	12	23

Digitized by Google

	Formel	Figur	Seite
25. Goniometer mit zwei Fernrohren, Einlassocular und Helligkeit	20, 21	13, 14	25
26. „ Vergrösserung	22, XXII	—	29
27. „ Bild des Krystalles. Abstand des Krystalles vom Beobachtungsfernrohre	23	15	30
28. „ Fremdes Licht	24—28	16	32
29. „ Erblicken des Krystalles durch Entfernung des Auges vom Oculare	29, 30	—	37
30. „ Zweck der einzelnen Goniometertheile	31—35, XIIa—XIIIa	—	41
31. „ Bedürfnisse der Messung. Schnelligkeit	—	—	43
32. „ „ „ „ Genauigkeit	—	—	44
33. „ „ „ „ Kleinheit des Lichtbildes. Bildstreuung	—	—	45
34. „ Huyghens'sches Ocular	36—37, XIIb—XIIIb	17	46
„ „ Zusatz zu Formel 36 auf Seite 47	—	—	324
35. „ Herstellung passender Combinationen	—	—	49
36. Messung mit einem Fernrohr	38	—	54
37. Bewegliches Ocular	—	—	55
38. Abstand zwischen Krystall und Objectiv	—	—	58
39. Correctur der Fernrohrstellung	—	—	60
40. Fehler in Folge mangelhafter Fernrohrcorrectur	39	18	62
41. Ausrichtung auf die verlängerte Limbusaxe	—	—	64
42. Anderweitige Einstellungsmethoden	—	—	65
43. Einfallswinkel	40, 40*a*	19	67
„ Druckfehler zur Seite 69 und 70	—	—	324
44. Mechanismus des Goniometers	—	20	71
45. „ Krystallträgertheil	—	—	74
46. „ „ Centrirung	—	21—23	74
„ „ „ Veränderte Construction der Doppelschraube	—	93	324
47. „ „ Centrirungsfehler	41	24, 25	78
48. „ „ Justirung	—	26	81
„ „ „ Veränderte Construction der Doppelschraube	—	93	324
49. „ „ Justirungsfehler	42—46	27, 28	83
50. „ Concentrische Drehung des Limbus	47—52	29—31	91
„ „ Verbesserung	—	—	325
51. „ Kreisform des Limbus	53	32	95
52. „ Verklemmungen	—	33, 34	97
53. „ Schutz der Substanz gegen Wärme und Feuchtigkeit	—	35, 36	99
„ „ Veränderte Construction des Schlüssels	—	—	325
54. „ Messungen in der Stopfbüchse	—	37	100
55. Ausführung der Messung	—	—	102
56. Beispiel einer Messungsreihe	—	38	107

Digitized by Google

	Formel	Figur	Seite
II. Kritik der Messungen. Beobachtungs- und Ausbildungsfehler.			
57. Unsicherheit der gemessenen Winkel	—	—	114
58. Eintheilung der Fehler	—	—	116
59. Uebergänge zwischen den Fehlern	—	—	117
60. Ausbildungsfehler	—	—	118
61. Constante Fehler	—	—	119
62. „ „ Repetition	—	—	120
63. „ „ Formänderung des Klebwachses	—	—	121
64. „ „ Senkung von Goniometertheilen durch die Schwere	—	—	121
65. „ „ Todter Gang und übersehene Schliessung einer Verklemmung	—	—	122
66. „ „ Uebrig bleibende constante Fehler	—	—	122
67. Versehen	—	—	123
68. Zufällige Fehler	—	—	123
69. Wahrscheinlichkeit	—	—	126
70. Wahrscheinlichkeit a posteriori	—	—	127
71. Arithmetisches Mittel	54	—	127
72. Mittlerer Fehler und mittlerer Quadratfehler der Bestimmungen einer genau bekannten Grösse	55—57	—	132
73. Mittlerer Fehler der Bestimmungen einer unbekannten Grösse	LV, LV*a*	—	134
74. Mittlerer Quadratfehler der Bestimmungen einer unbekannten Grösse	LVI, LVI*a*	—	136
75. Modul und wahrscheinlicher Fehler einer Beobachtung	58—64, LXIV	—	139
Druckfehler zu Seite 142 und 144	—	—	325
76. Fehler einer Function	65	39	146
77. Fehler eines Aggregates von unabhängigen Grössen	66—68	—	147
78. Fehler eines arithmetischen Mittels	69	—	147
79. Gewicht	70, 71	—	153
III. Stereographische Projection.			
80. Flächenpole auf der Kugel	—	40	156
81. Projection auf die Ebene. Eigenschaften derselben	—	41	158
82. Eigenschaften der sphärischen Figuren	—	42—45	159
83. Erhaltung der Kreise	—	46, 47	161
84. Abstand zweier Pole	—	48, 49	163
85. Construction eines Kreisbogens	—	50	164
86. Gegeben ein Pol, gesucht sein Gegenpol	—	51	165
87. Zu einer gegebenen Zone die Pole zu finden	—	52	165
88. Zu einem Pole die Zone zu finden	—	—	166
89. Gegeben zwei Punkte, gesucht ihr Abstand; gegeben eine Zone und ein Punkt in derselben, gesucht ein von ersterem um einen gegebenen Winkel abstehender zweiter Punkt der Zone	—	53	166

Digitized by Google

	Beispiel	Formel	Figur	Seite
90. Durch zwei gegebene Pole einen Zonenkreis zu legen	—	—	54, 55	167
91. Geometrischer Ort aller um einen gegebenen Winkel von einem gegebenen Punkte abstehenden Pole	—	—	56, 57	168
92. Den Winkel zweier gegebener Zonen zu bestimmen	—	—	58	169
93. Durch einen gegebenen Punkt einer Zone eine zweite gegen die erste unter einem bestimmten Winkel zu legen	—	—	59	170
94. Anwendung auf das Beispiel des §. 56	—	—	60	171
Druckfehler auf Seite 172	—	—	—	325
IV. Krystallberechnung.				
95. Grundlage derselben	—	—	61	175
96. Beziehung zwischen den Winkeln der Flächen einer Substanz	—	—	—	176
97. Zonengesetz	—	—	62	177
98. Eigenschaften der sphärischen Dreiecke	—	72	63	180
99. Praktische Bedürfnisse der Rechnung	—	—	—	181
100. Anlage der Rechnung	—	—	—	183
101. Beziehungen zwischen den trigonometrischen Functionen eines und mehrerer Winkel	—	73—77	64	184
102. Formeln zur Auflösung schiefwinkeliger sphärischer Dreiecke	—	78—82	—	186
103. Beispiel zu §. 102. Ausgleichung der Grundwinkel	200, 201	—	65	188
Nachtrag. Indirecte Auflösung	—	314	94	326
104. Berechnung der Dreiecksseiten aus den drei Winkeln	—	83 - 87	—	191
105. Fortsetzung des Beispiels	202—205	—	—	192
106. Rechnung aus einer Seite und den anliegenden Winkeln. Fortsetzung des Beispiels	206	88—90	—	193
107. Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben	208	91, 92	—	194
108. Zwei Seiten und ein gegenüber liegender Winkel oder zwei Winkel und eine gegenüber liegende Seite gegeben	—	93, 94	—	195
109. Bezeichnung der Krystallflächen. Axen. Parameter. Elemente. Indices	—	95—97	66	195
110. Rationalität der Indices	—	—	—	196
111. Ausdruck für die Tautozonalität. Zonensymbole	—	98—102	—	197
112. Zonenformeln	207, 210—213	103—112	—	199
Nachtrag zu Seite 200. Formel von Reusch	—	103 *a*	—	326
113. Wählbarkeit der Indices	—	—	67	205
114. Fortsetzung des Beispiels	207—213	—	—	209

Digitized by Google

	Beispiel	Formel	Figur	Seite
115. Grundgesetze für die Rechnung mit Axen	—	113—118	68—71	216
Nachtrag. Variante der Formel 117	—	117 *a*	—	327
116. Fortsetzung des Beispiels	214, 215	—	—	218
117. Rückblick auf den Gang der Berechnung im triklinen Systeme	—	119	72	219
118. Berechnung der Elemente aus einer Ueberzahl von Winkeln. Methode der kleinsten Quadrate	—	120—128	—	223
119. Berücksichtigung der wahrscheinlichen Fehler	—	129—131	—	229
120. Bestimmung der Differentialquotienten	—	128 *a*—*c*, 131 *b*—*c*, 132—134	—	230
121. Berechnung des Winkels zweier Flächen aus den Elementen	216 - 219	135—138	—	234
Druckfehler in Formel 135, S. 235	—	—	—	327
122. Berechnung der Summen $(a\,w)$, $(a\,a)$	220 - 223	131 *d*—*e*, 139—143	—	240
123. Auflösung der Endgleichungen. Princip derselben	—	144—148	—	243
124. Gewichte der Unbekannten. Controle der Auflösung der Gleichungen	—	149, 149 *a*	—	247
Verbesserung zu §§. 124 und 125	—	—	—	327
125. Wahrscheinliche Fehler der Unbekannten	—	150—152	—	247
126. Berechnung der Unbekannten und ihrer wahrscheinlichen Fehler. Ausführung	224	153, 154	—	248
127. Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate zur Auflösung der direct nicht berechenbaren Fälle	—	155 - 165	—	253
128. Berechnung von Zwillingskrystallen	—	—	—	264
129. Zwillinge aus identischen Complexen	—	—	73	264
130. Bestimmung von Zwillingsaxe und Drehungswinkel an Drehungszwillingen	—	166, 167	74, 75	266
131. Ermittelung des Zwillingsgesetzes mittelst Methode der kleinsten Quadrate	—	—	—	270
132. Drehungszwillinge mit Zwillingswinkel von 180°	—	—	76	270
133. Isogone und Ergänzungszwillinge. Aequivalente Drehungen und Spiegelungen	—	—	77, 78	271
Nachtrag zum ersten Absatze S. 272	—	—	—	327
134. Fernere Krystallsysteme. Isogonie. Antisogonie und Symmetrie. Specielle Werthe der Elemente	—	—	—	276
135. Monoklines System	—	168 - 173	79 - 81	278
136. „ „ Anzahl der unabhängigen Winkel	—	—	—	283
137. „ „ Wählbarkeit der Indices	—	—	—	234
138. „ „ Fälle, welche durch Dreiecksauflösung berechenbar sind	—	—	82	288

Digitized by Google

	Formel	Figur	Seite
139. Monoklines System. Auflösung rechtwinkeliger und rechtseitiger Dreiecke	174—177	—	298
140. » » Ausgleichsrechnung	178—181	—	299
141. Prismatisches (Rhombisches) System	182—187	83, 84	301
142. Tetragonales System	188—195	85	306
143. Tesserales System	196—198	86	309
144. Rhomboedrisches und Hexagonales System	—	—	311
145. Rhomboedrisches System	199, 300—305	87	311
146. Hexagonales System	307—313	88	315
V. Optische Orientirung.			
147. Princip derselben	—	—	318
148. Ausführung der Messungen	—	89—92	320
VI. Nachträge und Verbesserungen	314, 103 *a*, 117*a*	93—94	324
VII. Tabellarische Zusammenstellung der wichtigsten Formeln	—	—	328
VIII. Rechnungsbeispiel	200—224	—	353
IX. Tafelerklärung	—	I—V	358

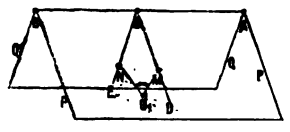
Digitized by Google

Erster Theil. Methoden.

I. Winkelmessung.

1. Winkel zweier Ebenen. Die Krystalle sind bekanntlich in der Mehrzahl der Fälle von ebenen Flächen begrenzt, deren Neigungen zu einander Gesetzmässigkeiten unterliegen; weil durch diese Gesetzmässigkeiten die betreffenden Substanzen charakterisirt sind, ist es eine der wichtigsten Aufgaben der beschreibenden Chemie, jene Flächenneigungen zu bestimmen. Um diese Aufgabe richtig zu erfassen, ist es gut, auf die Definition des Winkels zweier Ebenen zurückzugreifen. Zwei Ebenen P und Q, Fig. 1, gehörig vergrössert, schneiden sich in einer Geraden AB; zwei aus einem Punkte C dieser Geraden entspringende, beziehungsweise in P und Q liegende Lothe auf dieselbe, CD und CE, bilden mit einander einen Winkel DCE, welcher der innere Neigungswinkel der beiden Ebenen genannt wird, wenn seine Oeffnung der inneren Seite der beiden Flächen zugekehrt ist; die Ebene DCE steht auf beiden Ebenen P und Q senkrecht; zwei aus irgend einem Punkte O des Innern auf die Ebenen P und Q gefällte Lothe, welche die Geraden CD und CE in je einem Punkte M und N schneiden, falls O, wie in Fig. 1, in der Ebene DCE liegt, bilden mit einander einen Winkel, welcher das Supplement des inneren ist und äusserer oder Normalenwinkel genannt wird. $MON = 180^0 - DCE$.

Fig. 1.



Aus vielfachen, bekannten Gründen ist es vortheilhaft, nach dem Vorgange Millers immer den letzteren Winkel zu verwenden, was auch im Folgenden geschehen soll.

Digitized by Google

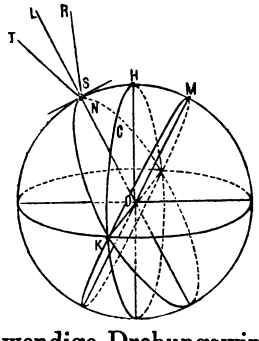
2. Bei der Messung mit dem **Carangeau'schen Anlegegoniometer** werden zwei bewegliche Schenkel an die Lothe CD und CE angelegt und ihr Winkel, gleich dem inneren Flächenwinkel, an einem Theilkreise abgelesen; weil, wie wir gesehen haben, die Ebene DCE zur Kante AB senkrecht steht, ergibt sich hieraus die Bedingung für die Richtigkeit der Messung, dass die Ebene der beiden Scheerenarme (eventuell die des Theilkreises, wenn er mit jenen fest verbunden ist) auf der zu messenden Kante senkrecht stehen muss.

3. Bei **Haidinger's graphischer Methode** stellt man AB senkrecht zur Zeichenebene, so dass ein über AB befindliches Auge die Flächen P und Q je zu einer mit CD, beziehungsweise CE parallelen Linie verkürzt erblickt (wobei also die Ebene $OENCMD$ zur Zeichenebene parallel wird; man zieht mittelst eines Lineals Gerade parallel CD und CE, deren Winkel man mit dem Transporteur bestimmt.

4. Messung durch Verschwindenlassen der Flächen. Macht man den Krystall um die Kante AB als Axe drehbar und stellt durch Drehung um diese Axe nach einander beide Flächen so, dass sie dem seitlich von der Axe befindlichen, während der Drehung unbeweglichen Auge als Linien verkürzt erscheinen, so muss man hierzu um den äusseren Flächenwinkel drehen.

5. Messung durch Reflexion. Am wichtigsten sind die Methoden, bei denen man nach einander beide Flächen in eine solche Lage bringt, dass sie das Licht einer Lichtquelle in eine bestimmte Richtung hin reflectiren; da dies für jede Fläche dann erfolgt, wenn ihre Normale in eine Ebene mit dem ein- und austretenden Lichtstrahle kommt und deren Winkel halbirt, so muss man also nach einander die Normalen der beiden Flächen in diese Lage bringen, wozu man um eine zu beiden gleichgeneigte Axe drehen muss; der nothwendige Drehungswinkel hängt von der Neigung der Drehungsaxe gegen die beiden Normalen ab. Sind in Fig. 2 OM und

Fig. 2.



Digitized by Google

ON die Flächennormalen, wovon gegenwärtig ON in der verlangten Lage sich befindet, in welche OM durch eine Drehung gelangen soll, so kann das ersichtlich durch Drehung um die Halbirende OH ihres Winkels, oder die zu ihnen beiden Senkrechte OK, oder irgend einen Radius OG im halbirenden Meridian HGK geschehen; während aber die Drehung um OH 180° betragen muss, ist um OK die kleinste Drehung, nämlich um MON, den gesuchten Normalenwinkel hinreichend. Daraus sehen wir, dass, um durch diese Drehung den Winkel MON richtig zu messen, die Drehungsaxe zu OM und ON senkrecht, das heisst, wie aus Fig. 1 ersichtlich, zur Krystallkante ACB (oder OK, Fig. 2) der beiden Flächen parallel sein muss; in allen anderen Fällen ist der nothwendige Drehungswinkel, also der abgelesene scheinbare Normalenwinkel der beiden Flächen grösser als der wirkliche.

Es ist nun aus Fig. 2 ersichtlich, dass dieser Bedingung jedenfalls genügt wird, wenn sowohl die Richtung des einfallenden RS, als des gespiegelten Lichtes ST zur Drehungsaxe OK senkrecht steht, weil dasselbe dann auch von ihrer Halbirenden SL gilt, mit welcher die Normale der spiegelnden Fläche zusammenfallen muss.

Wir werden uns nur mit der letzteren Art der Erfüllung der Bedingung zu beschäftigen haben, da die Lage der zu messenden Kante (AB in Fig. 1) auf directem Wege nicht controllirt werden kann.

Ueber die Bedingungen der Messung ohne Fernrohre sind zu vergleichen: Kupffer: Preisschrift über genaue Messung der Winkel an Krystallen. Berlin 1825. Kupffer: Handbuch der rechnenden Krystallonomie. Petersburg 1831. Mitscherlich: Ueber ein Goniometer, Abh. Ak. Berlin 1843, S. 189.

6. Dioptrische Formeln. Definitionen. Zur nachfolgenden Discussion der Winkelmessung sind einige Formeln der Dioptrik nothwendig, welche in Kürze zusammengestellt werden sollen; die brechenden Flächen werden dabei durchwegs als centrirte Kugelflächen vorausgesetzt (deren Krümmungsmittelpunkte also auf derselben Geraden, der optischen Axe liegen); die Lichtstrahlen sollen nahe der optischen Axe unter kleinen Winkeln gegen dieselbe in Ebenen verlaufen, welche durch die Axe gehen; die Linsendicken sind berücksichtigt. In einem Systeme

Digitized by Google

aus beliebig vielen brechenden Flächen sei erste oder vordere Seite diejenige, von welcher das Licht kommt, letzte oder hintere Seite, nach welcher es geht; dann gelten unter der obigen Voraussetzung (dass alle Strahlen nahe der optischen Axe, wenig geneigt gegen dieselbe einfallen) folgende Sätze:

Alle von der vorderen Seite (aus dem ersten Medium) parallel der Axe auf das brechende System fallende Strahlen, z. B. $f_0 h_0$, $f_1 h_1 \ldots$ Fig. 3 werden so gebrochen, dass ihre Richtungen nach der Brechung $h_0' F' G_0'$, $h_1' F' G_1' \ldots$ durch denselben Punkt F' der Axe hindurchgehen, welcher der zweite oder hintere Brennpunkt heisst; dabei ist der Fall nicht ausgeschlossen, dass der zweite Brennpunkt im ersten Medium liegt, wie Fig. 4 zeigt, in welchem Falle die austretenden Strahlen nicht wirklich durch F' hindurchgehen, sondern nur so austreten, als kämen sie von diesem Punkte. Jeden Weg, den die Strahlen in einer Richtung verfolgen können, können sie auch in entgegengesetzter Richtung durchlaufen; also werden alle von der rückwärtigen Seite kommenden, ihrer Richtung nach durch den zweiten Brennpunkt F' hindurchgehenden Strahlen $g_0' h_0'$, $g_1' h_1'$ (Fig. 3 und 4) so in das erste Medium gebrochen, dass sie das System parallel zur Axe verlassen $h_0 g_0$, $h_1 g_1$ (beziehungsweise in Fig. 3 $h_0 f_0$, $h_1 f_1$).

Fig. 3.

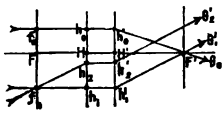
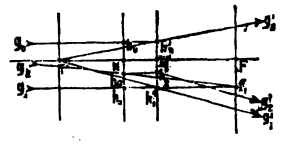


Fig. 4.



Dieselbe Bedeutung hat der erste Brennpunkt F bezüglich der aus dem zweiten Medium parallel zur Axe anlangenden Strahlen.

Die durch F und F' senkrecht zur optischen Axe gelegten Ebenen $f_0 F f_1$, $f_0' F' f_1'$ heissen erste und zweite Brennebene; in Bezug auf dieselben gilt der Satz:

Alle Strahlen, welche vor der Brechung durch denselben Punkt (z. B. f_1) einer Brennebene (entweder materiell oder der Richtung nach) hindurchgehen, verlassen das System nach der Brechung unter einander parallel ($h_1' F' G_1' \parallel h_2' G_2'$ in Fig. 3, $h_1' g_1' \parallel h_2' g_2'$ in Fig. 4).

Digitized by Google

Endlich haben wir noch einen Satz von den sogenannten Hauptebenen $h_0 H h_2 h_1$ und $h_0' H' h_2' h_1'$, welcher lautet:

Ein vom ersten Medium kommender, auf einen Punkt (z. B. h_0 oder h_2) der ersten Hauptebene zielender Strahl verlässt das System nach der Brechung in einer Richtung, welche die zweite Hauptebene in einem Punkte (h_0' beziehungsweise h_2') schneidet, der gleichweit im selben Sinne von der Axe absteht, wie jener Punkt der ersten Hauptebene. ($h_0' H' = h_0 H$; $h_2' H' = h_2 H$).

Die Hauptebenen sind ideale Constructionsflächen, deren Lage gegen die wirklichen brechenden Flächen in den §§. 13 bis 15 angegeben wird; die Durchschnitte der Hauptebenen mit der Axe heissen Hauptpunkte (H und H').

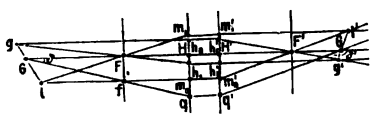
7. Construction des Bildes zum Gegenstande. Aus den Sätzen des vorigen Paragraphes leitet sich der weitere Satz ab, dass alle vor der Brechung durch denselben Punkt hindurchgehenden Strahlen (confocale Strahlen) nach der Brechung im Systeme wieder ihrer Richtung nach durch einen Punkt gehen, welcher das Bild des ersteren, oder der zu jenem conjugirte Punkt genannt wird. Dabei können die auffallenden Strahlen entweder wirklich vom Gegenstand ausstrahlen (reeller Gegenstand) und divergirend auf das brechende System fallen, oder auf einen irgendwo innerhalb des brechenden Systemes oder im zweiten Mittel gelegenen Punkt hinzielen (virtueller Gegenstand), also convergent auffallen; ebenso kann die Vereinigung zum Bilde wirklich stattfinden (reelles Bild, convergenter Austritt) oder der Vereinigungspunkt kann vor dem brechenden Systeme oder in demselben liegen (virtuelles Bild, divergenter Austritt).

Man kann, wenn die Lage der vier Cardinalpunkte $F H H' F'$ bekannt ist, das Bild eines gegebenen Punktes g durch Construction zweier beliebiger, durch denselben gehender Strahlen (vgl. §. 8) finden, der Einfachheit wegen wählt man jedoch hierzu am besten den parallel der Axe einfallenden und den durch den ersten Brennpunkt F gehenden Strahl; man verlängert beide bis zum Durchschnitte mit der ersten Hauptebene ($g h_0$ und $g F h_1$ in Fig. 5), zieht $h_0 h_0'$ und $h_1 h_1'$

Digitized by Google

parallel der Axe, um die Punkte der zweiten Hauptebene zu finden, von denen die gebrochenen Strahlen ausgehen und hat dann, zufolge des Satzes vom Brennpunkte, ersteren Strahl von h_0' zum zweiten Brennpunkte, letzteren von h_1' parallel der Axe zu ziehen, $h_0'g'$ und $h_1'g'$; ihr Durchschnitt g' gibt den Bildpunkt von g.

Fig. 5.

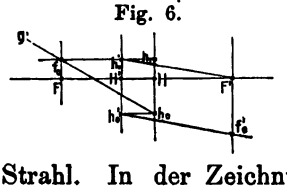


Um das Bild eines ebenen Gegenstandes gl zu finden, construirt man Fig. 5 die Bilder seiner Endpunkte und verbindet sie durch eine Gerade. Für die Construction des Bildes eines Punktes in der Axe, z. B. G, hat man den ungebrochen durchgehenden Axenstrahl, wozu man noch einen beliebigen, durch einen Punkt f der ersten Brennebene gehenden Strahl zieht, bis zum Durchschnitt mit der ersten Hauptebene in q verlängert, $qq' \parallel$ der Axe zieht, und mit Benützung des Satzes von der Brennebene den von q' ausfahrenden Strahl parallel irgend einem anderen von f ausgehenden macht, z. B. dem von f parallel der Axe einfallenden, zum zweiten Brennpunkte gebrochenen, $q'G' \parallel m_0'F'$; der Durchschnitt G' dieses Strahles mit der Axe gibt das Bild von G.

Es ist gut, wenn man zur Uebung diese und die folgenden Constructionen für solche Fälle wiederholt, wo entweder H' vor H oder F' vor H und F hinter H' liegt.

8. Einfallender Strahl gegeben, gebrochener gesucht. Zu einem gegebenen Strahl gf_0h_0, Fig. 6, findet man analog dem Verfahren des vorigen Paragraphes den gebrochenen, indem man h_0h_0' und $f_0h_1h_1'$ parallel der Axe zieht, h_1' mit F' verbindet und $h_0'f_0'$ parallel $h_1'F'$ macht; $h_0'f_0'$ ist der gebrochene Strahl. In der Zeichnung zu letzterem Beispiel wurde der bei Ocularen häufige Fall angenommen, dass die hintere Hauptebene vor der vorderen liegt, also das sogenannte Interstitium ε (vgl. §. 10) negativ ist.

Fig. 6.



9. Zu je einem Punkte des ersten und letzten Mediums den durch beide gehenden Strahl zu finden — eine Aufgabe,

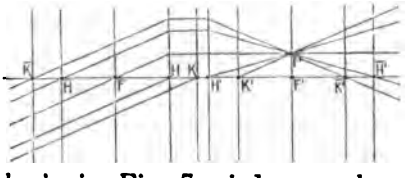
Digitized by Google

welche insbesondere bei Untersuchung des Einflusses der Blendungen und Aperturen auftritt — löst sich durch die Erwägung, dass jeder Strahl, der durch einen Punkt geht, auch durch das vom brechenden System erzeugte Bild dieses Punktes, den conjugirten Punkt, gehen muss; construirt man daher zu den gegebenen Punkten ihre conjugirten, so kennt man vier Punkte des durch die zwei gegebenen Punkte gehenden Strahles, wovon je zwei im ersten und im zweiten brechenden Medium liegen, welche also je den einfallenden und ausfahrenden Strahl bestimmen.

10. Weitere Fundamentalebenen und -Punkte. Ausser den — zu Constructionen hinreichenden — Haupt- und Brennebenen, deren wir uns ausschliesslich bedienen, sind noch andere Fundamentalebenen und -Punkte aufgesucht worden, welche ebenfalls ausgezeichnete Eigenschaften haben; wir erwähnen sie nur und geben eine Tabelle, mittels welcher alle auf dieselben bezüglichen Formeln in solche umgesetzt werden können, welche nur auf unsere vier erst erwähnten Punkte bezogen sind.

Sind $Gg = \beta$ die Grösse eines (zur Axe senkrechten) Gegenstandes im ersten Mittel, $G'g' = \beta'$ die Grösse seines durch das brechende System erzeugten Bildes (sowohl β als β' nach der oberen Seite der Axe positiv gerechnet), n der Brechungsexponent des ersten Mittels, n' der Brechungsexponent des letzten Mittels, so heissen die conjugirten Axenpunkte, wofür $\beta' = \beta$ die positiven (Gauss'schen) Hauptpunkte, $\beta' = -\beta$ die negativen (Töpler'schen) Hauptpunkte, $n'\beta' = n\beta$ die positiven (Listing'schen) Knotenpunkte, $n'\beta' = -n\beta$ die negativen (Töpler'schen) Knotenpunkte; ihre ferneren Eigenschaften, sowie die einfachen Constructionen, welche mittelst derselben möglich sind, sind aus der am Schlusse des Paragraphes citirten Arbeit Töpler's zu entnehmen. Ihre Lage in einem bestimmten Falle ist nach einer Zeichnung Töpler's in Fig. 7 wieder gegeben; sind $\varphi = FH$ die vordere Brennweite, $\varepsilon = HH'$ das Inter-

Fig. 7.



Digitized by Google

stitium, $\varphi' = H'F'$ die hintere Brennweite, sämmtlich im Sinne der Lichtbewegung positiv gerechnet, so ist die Distanz je zweier Fundamentalpunkte gegeben durch $m_1\varphi + m_2\varepsilon + m_3\varphi$; die drei Zahlen m_1, m_2, m_3 finden sich aus der folgenden Tabelle, worin der gesuchte Abstand mit dem Punkte des oberen Horizontaleinganges voraus zu schreiben ist.

		$\bar{K}$	$\bar{H}$	F	H	H'	K	K'	F'	$\bar{K}'$
	$\bar{H}$	113	212	112	012	002	111	101	001	$\bar{1}01$
	$\bar{K}'$	212	311	211	111	101	210	200	100	
	F'	112	211	111	011	001	110	100		
	K'	012	111	011	$\bar{1}11$	$\bar{1}01$	010			
1.	K	002	101	001	$\bar{1}01$	$\bar{1}\bar{1}1$				
	H'	111	210	110	010					
	H	101	200	100						
	F	001	100							
	$\bar{H}$	$\bar{1}01$								

Zum Beispiele:

$$\bar{H}\bar{K}' = 3\varphi + \varepsilon + \varphi'$$
$$H'K = -\varphi - \varepsilon + \varphi'$$
$$F'\bar{H}' = \varphi'.$$

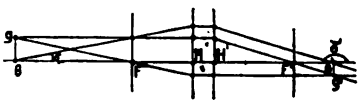
Die Symmetrie der Anordnung, sowie die Besonderheiten der Vertheilung, wenn eine oder mehrere der Grössen $\varphi\varepsilon\varphi'$ negative Werthe annehmen, können daraus leicht abgesehen werden.

II. Grundformeln. Sind in Figur 8 $GH = h$ vordere Hauptdistanz eines leuchtenden Punktes der Axe, $G'H' = h'$ hintere Hauptdistanz des zugehörigen Vereinigungs- oder Bildungspunktes, beide wieder im Sinne der Lichtbewegung positiv gezählt, also h, wenn G vor H, h', wenn H' vor G' liegt; $Gg = \beta$ und $G'g' = \beta'$ die Object- und die Bildgrösse, (wovon also β' im vorliegenden Falle einen negativen Werth hätte), δ und δ' die Winkel eines von G kommenden

Digitized by Google

und des zugehörigen, nach G' gebrochenen Strahles mit der Axe, so wird, unter Beibehaltung der schon früher gebrauchten Bezeichnungen

Fig. 8.



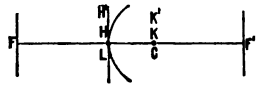
$$2.\quad \begin{cases} h = \frac{\varphi h'}{h' - \varphi'}\,;\ h' = \frac{\varphi' h}{h - \varphi}\,;\ \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{n'}{n}\,;\ \beta' = \frac{\beta}{\varphi'}(\varphi' - h') = \frac{\beta\,\varphi}{\varphi - h} \\ n\beta\ tg\ \delta = n'\beta'\ tg\ \delta'. \end{cases}$$

12. Gang der Objecte und ihrer Bilder. Zur Anschaulichkeit, auch für den Zeichengebrauch, sind in Tabelle 3 (auf folgender Seite) unter der Annahme, dass der leuchtende Punkt die ganze Axe von $+\infty$ bis $-\infty$ durchläuft, der zugehörige Bildpunkt (Colonne 2), vordere (Colonne 3) und hintere Hauptdistanz (Col. 4), Bildgrösse (Col. 5) und Distanz der beiden conjugirten Vereinigungspunkte (Colonne 6) zusammengestellt; dabei ist, wie schon in §. 7 erwähnt, der Gegenstand reell, so lange er vor, virtuell, wenn er hinter der ersten brechenden Fläche steht; der letztere Fall tritt ein, wenn z. B. durch eine frühere Linse ein Bild entworfen wird, das hinter die Vorderfläche der nächsten Linse zu stehen käme, in Folge der Anwesenheit dieser aber überhaupt nicht wirklich zu Stande kommt; es fallen dann die Strahlen so auf die letztere Linse auf, als wenn sie von dem Punkte im Innern derselben herkämen; das Bild hingegen ist reell, wenn es hinter, virtuell, wenn es vor der letzten brechenden Fläche sich befindet. Die Punkte R und R', in welchen Bild und Gegenstand zusammenfallen, heissen die Asymptosen; die Folge der Cardinalpunkte ist mit $FHH'F'$ angenommen.

Endlich sind, um eine Anwendung auf praktische Fälle zu ermöglichen, die Formeln zur Ableitung von $\varphi\,\varepsilon\varphi'$ aus den Dimensionen der einzelnen brechenden Flächen nothwendig.

13. Eine brechende Fläche. Beide positiven Hauptpunkte H und H' Fig. 9 fallen mit dem Durchschnittspunkte L der Fläche und der Axe zusammen; beide Knotenpunkte K und K' mit dem Krümmungsmittelpunkte C.

Fig. 9.



$$4.\quad \begin{cases} L\,C = r = HK = \varphi' - \varphi \\ \varepsilon = 0;\ \varphi = \frac{n\,r}{n' - n} = FL = CF';\ \varphi' = \frac{n'\,r}{n' - n} = LF' = FC \\ h = \frac{h'\,\varphi}{h' - \varphi'};\quad h' = \frac{h\,\varphi'}{h - \varphi};\quad \beta' = \frac{\beta}{\varphi'}\,(\varphi' - h') = \frac{\beta\,\varphi}{\varphi - h}\,. \end{cases}$$

Digitized by Google

3. Gang der Objecte und Bilder.

Object	Bild	h	h'	β'	GG'
∞	F'	$+\infty$	φ'	0	∞
$\underline{K}$	$\underline{K'}$	$\varphi+\varphi'$	$\varphi+\varphi'$	$-\frac{n}{n'}\beta=-\beta\frac{\varphi}{\varphi'}$	$2\varphi+2\varphi'+\varepsilon$
$\underline{H}$	$\underline{H'}$	2φ	$2\varphi'$	$-\beta$	$2\varphi+2\varphi'+\varepsilon$
F	∞	φ	∞	∞	∞
$\underline{\varkappa}$	$\underline{K}$	$\varphi\frac{\varepsilon+\varphi+\varphi'}{\varepsilon+\varphi+2\varphi'}$	$-\varepsilon-\varphi-\varphi'$	$\beta\frac{\varepsilon+\varphi+2\varphi'}{\varphi'}$	$-\varphi'\frac{\varepsilon+2\varphi+2\varphi'}{\varepsilon+\varphi+2\varphi'}$
$\underline{\chi}$	$\underline{H}$	$\varphi\frac{\varepsilon+2\varphi}{\varepsilon+2\varphi+\varphi'}$	$-\varepsilon-2\varphi$	$\beta\frac{\varepsilon+2\varphi+\varphi'}{\varphi'}$	$-\varphi\frac{\varepsilon+2\varphi+2\varphi'}{\varepsilon+2\varphi+\varphi'}$
π	F	$\varphi\frac{\varepsilon+\varphi}{\varepsilon+\varphi+\varphi'}$	$-\varepsilon-\varphi$	$\beta\frac{\varepsilon+\varphi+\varphi'}{\varphi'}$	$-\varphi\frac{\varphi'}{\varepsilon+\varphi+\varphi'}$
R	R	$-\frac{\varepsilon-\varphi+\varphi'}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon^2+\varphi^2+\varphi'^2+2\varepsilon\varphi+2\varepsilon\varphi'-2\varphi\varphi'}$	$-\frac{\varepsilon+\varphi}{2}\frac{\varphi'}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon^2+\varphi^2+\varphi'^2+2\varepsilon\varphi+2\varepsilon\varphi'-2\varphi\varphi'}$	$\frac{\beta}{\varphi'}\left\{\frac{\varepsilon+\varphi+\varphi'}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon^2+\varphi^2+\varphi'^2+2\varepsilon\varphi+2\varepsilon\varphi'-2\varphi\varphi'}\right\}$	0
χ	H	$\frac{\varepsilon\varphi}{\varepsilon+\varphi'}$	$-\varepsilon$	$\beta\frac{\varepsilon+\varphi'}{\varphi'}$	$\frac{\varepsilon\varphi}{\varepsilon+\varphi'}$

Digitized by Google

H	H'	0	0	β	ε
H'	χ'	$-\varepsilon$	$\dfrac{\varepsilon\varphi'}{\varepsilon+\varphi}$	$\beta\dfrac{\varphi}{\varepsilon+\varphi}$	$\dfrac{\varepsilon\varphi'}{\varepsilon+\varphi}$
χ	K'	$\varphi-\dfrac{\varphi\varphi'}{\varepsilon+\varphi}$	$-\varepsilon-\varphi+\varphi'$	$\beta\dfrac{\varepsilon+\varphi}{\varphi'}$	$\dfrac{\varepsilon\varphi'}{\varepsilon+\varphi}$
K	K'	$\varphi-\varphi'$	$-\varphi+\varphi'$	$\beta\dfrac{\varphi}{\varphi'}$	ε
K'	χ'	$-\varepsilon+\varphi-\varphi'$	$\varphi'-\dfrac{\varphi\varphi'}{\varepsilon+\varphi'}$	$\beta\dfrac{\varphi}{\varepsilon+\varphi'}$	$\dfrac{\varepsilon\varphi}{\varepsilon+\varphi'}$
R'	R'	$-\dfrac{\varepsilon-\varphi+\varphi'}{2}-\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{\varepsilon\varphi}{\varepsilon^2+\varphi^2+\varphi'^2+2\varepsilon\varphi-2\varepsilon\varphi'-2\varphi\varphi'}}$	$\varphi'-\dfrac{\varepsilon-\varphi+\varphi'}{2}+\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{\varepsilon\varphi}{\varepsilon^2+\varphi^2+\varphi'^2+2\varepsilon\varphi-2\varepsilon\varphi'-2\varphi\varphi'}}$	$\beta\dfrac{\varphi}{\varepsilon+\varphi+\varphi'}$	0
F'	π'	$-\varepsilon-\varphi'$	$\varphi'\dfrac{\varepsilon+\varphi'}{\varepsilon+\varphi+\varphi'}$	$\beta\dfrac{\varphi}{\varepsilon+\varphi+\varphi'}$	$-\dfrac{\varphi\varphi'}{\varepsilon+\varphi+\varphi'}$
K'	χ'	$-\varepsilon-\varphi-\varphi'$	$\varphi'\dfrac{\varepsilon+\varphi+\varphi'}{\varepsilon+2\varphi+\varphi'}$	$\beta\dfrac{\varphi}{\varepsilon+2\varphi+\varphi'}$	$-\varphi'\dfrac{\varepsilon+2\varphi+2\varphi'}{\varepsilon+2\varphi+\varphi'}$
H'	χ'	$-\varepsilon-2\varphi'$	$\varphi'\dfrac{\varepsilon+2\varphi'}{\varepsilon+\varphi+2\varphi'}$	$\beta\dfrac{\varphi}{\varepsilon+\varphi+2\varphi'}$	$\varphi'\dfrac{\varepsilon+2\varphi+2\varphi'}{\varepsilon+\varphi+2\varphi'}$
$-\infty$	F'	$-\infty$	φ'	0	∞

Digitized by Google

14. Zwei brechende Flächen. (Linse.) Die Grössen der ersten (vorderen) Fläche tragen den Index 1, die der zweiten (rückwärtigen) 2, die des aus ihnen gebildeten Systems 12.

$$5.\quad \begin{cases} d_{12} = L_1 L_2 = H_1 H_2;\ L_1 H_{12} = \dfrac{d_{12}\,\varphi_1}{\varphi_1' + \varphi_2 - d_{12}} \\ H_{12}' L_2 = \dfrac{d_{12}\,\varphi_2'}{\varphi_1' + \varphi_2 - d_{12}};\quad \varepsilon_{12} = d_{12}\,\dfrac{d_{12} + \varphi_1 - \varphi_1' - \varphi_2 + \varphi_2'}{d_{12} - \varphi_1' - \varphi_2} \\ \varphi_{12} = \dfrac{\varphi_1\,\varphi_2}{\varphi_1' + \varphi_2 - d_{12}};\quad \varphi_{12}' = \dfrac{\varphi_1'\,\varphi_2'}{\varphi_1' + \varphi_2 - d_{12}}; \end{cases}$$

hiezu noch die Formeln 2., alle Grössen mit dem Index 12 versehen $\left(h_{12} = \frac{h_{12}'\,\varphi_{12}}{h_{12}' - \varphi_{12}'}\text{ etc.}\right)$

Weil hier das zweite Medium der ersten Fläche mit dem ersten der zweiten identisch ist ($n_1' = n_2$), so liessen sich mit Rücksicht auf die Krümmungsradien der beiden Linsenflächen etwas vereinfachte Formeln gewinnen; wichtiger ist der Fall, wenn auch noch $n_1 = n_2'$, das heisst, wenn die Linse beiderseits vom selben Medium (etwa Luft) umgeben ist; setzen wir dann noch den Brechungsquotienten der Linse gegen Luft $= \mu = \frac{n_2}{n_1}$, so werden: $\varphi_1 = \frac{n_1\,r_1}{n_2 - n_1} = \frac{r_1}{\mu - 1}$, $\varphi_1' = \frac{\mu\,r_1}{\mu - 1}$, $\varphi_2 = -\frac{\mu\,r_2}{\mu - 1}$; $\varphi_2' = -\frac{r_2}{\mu - 1}$; $d_{12} = L_1 L_2 = d$, wobei d die Linsendicke; durch Substitution dieser Werthe in 5. erhalten wir nach einigen leichtverständlichen Reductionen:

$$5a.\quad \begin{cases} \varphi_{12} = \varphi_{12}' = -\dfrac{\mu}{\mu - 1}\,\dfrac{r_1\,r_2}{\mu\,(r_1 - r_2) - (\mu - 1)\,d}; \\ \varepsilon_{12} = \dfrac{(\mu - 1)\,d\,(r_1 - r_2 - d)}{\mu\,(r_1 - r_2) - (\mu - 1)\,d};\ L_1 H_{12} = \dfrac{d\,r_1}{\mu\,(r_1 - r_2) - (\mu - 1)\,d}; \\ H_{12}' L_2' = \dfrac{-\,d\,r_2}{\mu\,(r_1 - r_2) - (\mu - 1)\,d} \end{cases}$$

Die verschiedenen Arten von Linsen ergeben sich, wenn r_1 und r_2 positiv oder negativ gesetzt werden; alle Linsen von positiver Brennweite nennen wir Sammel- oder Collectivlinsen, die von negativer Zerstreuungs- oder Dispersivlinsen. Wir haben somit folgende mögliche Fälle, wobei unter r_1 und r_2 die wirkliche Grösse der Radien, unter (r_1) und (r_2) deren absoluten Werthe verstanden sind.

Digitized by Google

	r_1	r_2	Linse	ε_{12}	L_1H_{12}	$H_{12}'L_2$		r_1	r_2	Linse	ε_{12}	l_1H_{12}	$H_{12}'L_2$
$\varphi_{12} > 0$ collectiv	$+$	$-$	Biconvex	$+$	$+$	$+$	$\varphi_{12} < 0$ dispersiv	$-$	$+$	Biconcav	$+$	$+$	$+$
	∞	$-$	Planconvex	$+$	$+$	0		∞	$+$	Planconcav	$+$	$+$	0
	$+$	∞	Convexplan	$+$	0	$+$		$-$	∞	Concavplan	$+$	0	$+$
	$-$	$-$	Concavconvex	$+$	$+$	$-$		$+$	$+$	Convexconcav	$+$	$+$	$-$
			$r_1<r_2$; $(r_1)>(r_2)$							$r_1 > r_2$			
	$+$	$+$	Convexconcav	$+$	$-$	$+$		$-$	$-$	Concavconvex	$+$	$-$	$+$
			$r_1 < r_2$							$r_1>r_2$; $(r_1)<(r_2)$			

15. Zwei Systeme brechender Flächen. Tragen wieder 1. und 2. System die Indices 1 und 2 und das aus beiden gebildete System 12, so haben wir:

$$6.\quad \begin{cases} d_{12} = H_1'H_2;\ H_{12}H_1 = \dfrac{d_{12}\varphi_1}{d_{12}-\varphi_1'-\varphi_2};\ H_2'H_{12}' = \dfrac{d_{12}\varphi_2'}{d_{12}-\varphi_1'-\varphi_2}; \\ \varepsilon_{12} = d_{12}\dfrac{d_{12}+\varphi_1-\varphi_1'-\varphi_2+\varphi_2'}{d_{12}-\varphi_1'-\varphi_2} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ \varphi_{12} = \dfrac{\varphi_1\varphi_2}{\varphi_1'+\varphi_2-d_{12}};\ \varphi_{12}' = \dfrac{\varphi_1'\varphi_2'}{\varphi_1'+\varphi_2-d_{12}}; \\ F_{12}H_1 = \varphi_1\dfrac{\varphi_2-d_{12}}{\varphi_1'+\varphi_2-d_{12}};\ H_2'F_{12}' = \varphi_2'\dfrac{\varphi_1'-d_{12}}{\varphi_1'+\varphi_2-d_{12}}; \\ h_{12} = h_1 + \dfrac{d_{12}\varphi_1}{\varphi_1'+\varphi_2-d_{12}};\ h_{12}' = h_2' + \dfrac{d_{12}\varphi_2'}{\varphi_1'+\varphi_2-d_{12}}; \end{cases}$$

dazu noch die Formeln 2., alle Grössen mit dem Index 12 versehen.

Ueber die Ableitung der vorstehenden Formeln und die eingehenden Angaben bezüglich des Aplanatismus, Achromatismus etc. sind zu vergleichen: Helmholtz: Handbuch der physiologischen Optik, Leipzig, 1867. Viele Theile der Dioptrik, die subjectiven Erscheinungen, Verhältnisse des Auges, Helligkeit u. s. w. v. Lang: Einleitung in die theoretische Physik. Braunschweig, 1867. Sehr vollständige Behandlung der elementaren Theile der Dioptrik, zahlreiche Literatur (auch bei Helmholtz). Töpler: Bemerkungen über die Anzahl der Fundamentalpunkte etc. Pogg. Ann. Bd. 142. S. 232. 1871. — Aufstellung der negativen Haupt- und Knotenpunkte, einfache Bildconstructionen, Verzerrung, Bestimmung der Brennweite. v. Lang: Zur Dioptrik eines Systemes centrirter Kugelflächen. Sitzungsb. Ak. Wiss. Wien, Bd. 63, S. 666. 1871. Einfache Ableitung der Töpler'schen Formeln.

16. Goniometer mit zwei Fernrohren. Die gebräuchlichste Art, die Richtung des einfallenden und gespiegelten Lichtes zu fixiren, besteht darin, dass man die Lichtquelle möglichst

Digitized by Google

nahe vor einer Oeffnung anbringt, welche im vorderen Brennpunkte einer Sammellinse zu deren optischer Axe senkrecht steht; diese Linse, als welche man gewöhnlich das Objectiv eines astronomischen Fernrohres benutzt, nennen wir das Einlassobjectiv und bezeichnen alle darauf bezüglichen Grössen mit dem Index 0 (Cardinalpunkte F_0 H_0 H_0' F_0', Brennweite $\varphi_0 = \varphi_0'$), die Oeffnung (Einlassapertur) soll ein Fadenkreuz (Einlassfadenkreuz) tragen, dessen Kreuzungspunkt in der optischen Axe der Linse liegt. Das vom Objective kommende Licht fällt nach der Spiegelung an der Krystallfläche auf Objectiv und Ocular eines zweiten astronomischen Fernrohres; die gemeinsame optische Axe dieser beiden (Beobachtungsobjectiv und -Ocular) schneidet, gehörig verlängert, diejenige des Einlassobjectives; die auf das Objectiv und Ocular des Beobachtungsfernrohres bezüglichen Grössen tragen die Stellenzeiger 1 und 2; der rückwärtige Brennpunkt F_1' des ersteren

Fig. 10.

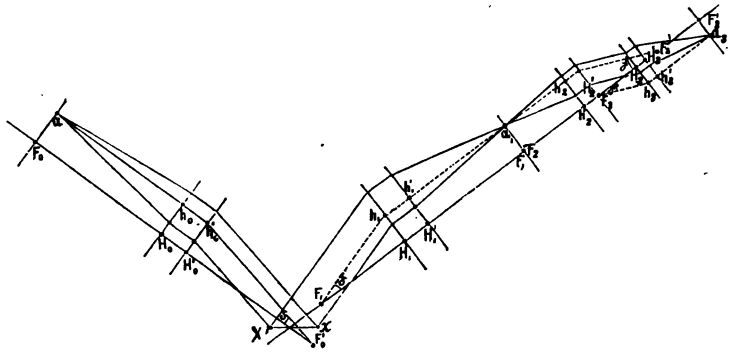


Fig 10, fällt mit dem vorderen Brennpunkte F_2 des letzteren zusammen und trägt ein ebenfalls zur optischen Axe senkrechtes, das Beobachtungsfadenkreuz.

Wir setzen voraus, dass alle Strahlen nahe an der Axe unter kleinen Winkeln gegen dieselben verlaufen, und, gehörig verlängert, dieselbe an irgend einem Punkte durchschneiden.

17. Gang der Lichtstrahlen. Irgend ein Punkt a_1 Fig. 10 des in der vorderen Brennebene F_0 des Objectives befindlichen Fadenkreuzes sendet einen Lichtkegel aus, welcher, nach dem

Digitized by Google

Satze von der Brennebene, das Objectiv als Strahlencylinder verlässt, und unter einem Winkel δ gegen die optische Axe des Einlassfernrohres geneigt, auf die Krystallfläche xx' fällt; vermittelst des parallel zur Axe einfallenden und darum zum zweiten Brennpunkte gebrochenen Constructionsstrahles $a\ h_0\ h_0'\ F_0'$ findet man die Richtung des Cylinders, während die äussersten noch den Krystall treffenden Strahlen dadurch erhalten werden, dass man von den Endpunkten des Krystalles Parallele zu $h_0'\ F_0'$ zieht.

Vom Krystalle wird der Cylinder wieder als solcher reflectirt und tritt (unter der Voraussetzung, dass die Normale von xx' gleichgeneigt gegen die optischen Axen der Fernrohre und in derselben Ebene mit ihnen liegt), unter demselben Winkel δ in das Beobachtungsobjectiv ein; hier wird er, wieder nach dem Satze von der Brennebene, in einem Punkte a_1 der rückwärtigen Focalebene vereinigt, in welch' letzterer somit ein scharfes Bild des Punktes a und des Einlassfadenkreuzes überhaupt entsteht; der Punkt a_1 wird durch denjenigen Strahl $F_1\ h_1\ h_1'\ a_1$ des Strahlencylinders ermittelt, welcher durch den vorderen Brennpunkt F_1 hindurchgeht; das vom Punkte a_1 weitergehende Strahlenbüschel fällt nun auf das Ocular des Beobachtungsfernrohres wiederum als ein confocales, aus einem Punkte der ersten Brennebene desselben kommendes, und verlässt desshalb das Ocular als Strahlencylinder, fällt als solcher ins Auge und wird desshalb in einem einzigen Punkte a_3 der rückwärtigen Focalebene desselben, d. h. der Retina vereinigt, woselbst somit ein gleichzeitiges scharfes Bild der beiden Punkte a_1 des zweiten und a des ersten Fadenkreuzes sowie dieser Fadenkreuze überhaupt entsteht. (Vgl. wieder die Constructionsstrahlen $a_1\ h_2\ h_2'\ F_2'$ und $F_3\ h_3\ h_3'\ a_3$.)

18. Formeln für den Gang der Strahlen. Wie aus Fig. 10 ersichtlich ist, haben wir, wenn wir unter a und a_1 nunmehr die Distanzen $F_0 a$ und $F'_1 a_1 = F_2 a_1$ verstehen:

$$tg\ \delta = \frac{H_0' h_0'}{H_0' F_0'} = \frac{F_0 a}{H_0' F_0'} = \frac{a}{\varphi_0};\ \text{und}$$

$$tg\ \delta = \frac{H_1 h_1}{F_1 H_1} = \frac{F_1' a_1}{F_1 H_1} = \frac{a_1}{\varphi_1}$$

und bei der Brechung aus dem Ocular und in's Auge:

Digitized by Google

$$tg\,\delta' = \frac{H_2' h_2'}{H_2' F_2'} = \frac{F_2 a_1}{H_2' F_2'} = \frac{a_1}{\varphi_2} \text{ und}$$

$$tg\,\delta' = \frac{H_3 h_3}{H_3 F_3} = \frac{F_3' a_3}{H_3 F_3} = -\frac{a_3}{\varphi_3}$$

also durch Gleichsetzung der beiden Werthe für $tg\,\delta$ einerseits und derjenigen für $tg\,\delta'$ andererseits

$$\frac{a}{\varphi_0} = \frac{a_1}{\varphi_1} \text{ und } \frac{a_1}{\varphi_2} = -\frac{a_3}{\varphi_3}, \text{ somit:}$$

$$a_1 = a\,\frac{\varphi_1}{\varphi_0};\; a_3 = -\frac{a_1 \varphi_3}{\varphi_2} = -a\,\frac{\varphi_1 \varphi_3}{\varphi_0 \varphi_2}$$

wodurch die Abbildung a_1 eines Punktes a des ersten Fadenkreuzes auf der Ebene des zweiten, sowie diejenige a_3 dieser beiden a und a_1 auf der Retina bestimmt sind. Hiebei ist die Brennweite eines allenfalls vor dem Objective des Einlassfernrohres befindlichen Oculares, sowie die rückwärtige Brennweite des Auges ohne Einfluss auf die Lage der Bilder; ebenso die Distanzen des Krystalles vom Einlass- und Beobachtungsfernrohr, sowie die des Letzteren vom Auge.

Es ist aus den negativen Zeichen der beiden Ausdrücke für a_3 ersichtlich, dass die Bilder der Fadenkreuze verkehrte sind, folglich nach einer bekannten Eigenschaft des Auges aufrecht gesehen werden.

19. Berücksichtigung der deutlichen Sehweite. Das Vorige gilt für ein ideales, auf ∞ accommodirtes Auge; allein nicht jedes Auge vermag sich auf unendliche Entfernung einzustellen; die Retina geht nicht immer durch den rückwärtigen Brennpunkt, sondern schneidet die Axe entweder in einer grösseren Entfernung (Myopie, Kurzsichtigkeit), oder in einer geringeren (Hypermetropie, Uebersichtigkeit). Nebstdem vermag das Auge ohne künstliche Mittel (Lähmung der Accomodationsfähigkeit durch Atropin etc.) zumeist nicht, die Accomodationsspannung völlig aufzuheben; in Folge dessen ist sein Fernpunkt näher, als im atropinisirten Zustande; und selbst auf diesen, so näher gerückten Fernpunkt (wenn der Ausdruck gestattet ist) stellt das Auge nur sehr ungerne ein, wovon man sich überzeugt, wenn man in einem mit Fadenkreuz versehenen, gegen dasselbe verschraubbaren Oculare für Augen von sehr verschiedenen Fernpunkten Fadenkreuz und Ocularlinse so gegen ein-

Digitized by Google

ander verstellen lässt, dass ersteres mit möglichster Bequemlichkeit für das Auge möglichst scharf und deutlich gesehen werde; man wird finden, dass in diesem Falle, welcher einzig und allein für die vorliegenden Entwickelungen in Betracht kommt, der vom Auge aufgesuchte Einstellungspunkt für Augen von verschiedenem Fernpunkte innerhalb ziemlich enger Grenzen liegt, etwa 150 *mm* bis 200 *mm* vor der vorderen Hauptebene des Auges, welche selbst etwa 2*mm* hinter der Vorderfläche der Hornhaut liegt; ersteren Abstand wollen wir als die deutliche Sehweite Δ bezeichnen und hiefür den mittleren Werth 180 *mm* annehmen. Ein in solcher Entfernung Δ vor der ersten Hauptebene stehendes Object wird also auf der Retina abgebildet, der Ort der letzteren ist mit Δ conjugirt, somit ist nach 2., wenn φ_3 die vordere, φ_3' die rückwärtige Brennweite des Auges bedeutet ($\varphi_3 = 15\ mm$, $\varphi_3' = 20\ mm$ im Durchschnitt) und $h_3 = \Delta$, $h_3' = H_3' R$, der rückwärtigen Hauptdistanz der Retina gesetzt wird,

$$7.\ \left\{ H_3' R = h_3' = \frac{h_3 \varphi_3'}{h_3 - \varphi_3} = \frac{\Delta \varphi_3'}{\Delta - \varphi_3} = \frac{\Delta \varphi_3'}{d} = \frac{180 \cdot 20}{165} = 21 \cdot 8\, mm \right.$$

wobei wir die oft wiederkehrende Grösse $\Delta - \varphi_3$ mit d bezeichnen; nehmen wir nun an, dass der vordere Brennpunkt des Auges F_3 mit dem rückwärtigen Hauptpunkte des Oculares H_2' zusammenfalle, Fig. 10, eine Annahme, welche den durchschnittlichen Verhältnissen hinlänglich entspricht (siehe unten), und bezeichnen wir mit G_3', G_3, G_2' und G_2 die Orte des Bildes nach und vor der Brechung im Auge, nach und vor der Brechung im Oculare, wobei G_2' und G_3 zusammenfallen müssen, weil das vom Oculare entworfene Bild zugleich Gegenstand für die Brechung im Auge ist, so haben wir nach dem Vorigen

$$h_3 = G_3 H_3 = \Delta$$

und wegen der Coincidenz von H_2' und F_3 wird

$$h_2' = H_2' G_2' = H_2' G_3 = F_3 G_3 = F_3 H_3 + H_3 G_3 = \varphi_3 - \Delta = -d$$

woraus nach 2.

$$h_2 = \frac{h_2' \varphi_2}{h_2' - \varphi_2'} = \frac{-d \varphi_2}{-d - \varphi_2} = \frac{d \varphi_2}{d + \varphi_2} = G_2 H_2.$$

G_2, der Ort des Bildes vor der Brechung durch das Ocular, muss mit F_1' zusammenfallen, weil wir ja wissen, dass das vom Objectiv entworfene Bild in seinem rückwärtigen

Digitized by Google

Brennpunkte F_1' entsteht; also ist $F_1' H_2$ oder der Abstand des rückwärtigen Brennpunktes des Objectives vom vorderen Hauptpunkte des Oculares nunmehr nicht gleich φ_2, sondern:

$$8. \quad F_1' H_2 = G_2 H_2 = \frac{d\,\varphi_2}{d+\varphi_2}.$$

Es muss somit das Ocular dem Objective um

$$\varphi_2 - \frac{d\,\varphi_2}{d+\varphi_2} = \frac{\varphi_2^2}{d+\varphi_2} = F_2 F_1'$$

im Vergleiche gegen die auf ∞ accommodirte Stellung genähert werden.

Um nun die neuen Bildgrössen zu bestimmen, ist zu berücksichtigen, dass nach dem Obigen

$$h_3' = H_3' R = \frac{\Delta\,\varphi_3'}{d}; \; h_3 = \Delta; \; h_2' = -d; \; h_2 = \frac{d\,\varphi_2}{d+\varphi_2};$$

dass ferner wie früher

$$\frac{a}{\varphi_0} = \frac{a_1}{\varphi_1}; \; a_1 = \frac{a\,\varphi_1}{\varphi_0},$$

dass dieses a_1 die Gegenstandsgrösse β_2 für die Brechung am Oculare ist und dass das vom Oculare entworfene Bild β_2' der Gegenstand für die Brechung im Auge, also gleich β_3 ist; das heisst, wir haben:

$$\beta_2 = a_1, \; \beta_2' = \frac{\beta_2}{\varphi_2'}(\varphi_2' - h_2') = \frac{a_1}{\varphi_2}(\varphi_2 + d)$$

$$\beta_3 = \beta_2' = \frac{a_1}{\varphi_2}(\varphi_2 + d);$$

$$\beta_3' = a_3 = \frac{\beta_3}{\varphi_3'}(\varphi_3' - h_3') = \frac{a_1}{\varphi_2\,\varphi_3'}(\varphi_2 + d)\left(\varphi_3' - \frac{\Delta\,\varphi_3'}{d}\right) =$$

$$= \frac{a_1}{\varphi_2}(\varphi_2 + d)\frac{d-\Delta}{d} = \frac{a_1}{\varphi_2}(\varphi_2 + d)\,\frac{\Delta - \varphi_3 - \Delta}{d} = -\frac{a_1\,\varphi_3}{\varphi_2}\left(1 + \frac{\varphi_2}{d}\right),$$

somit die Doppelgleichung:

$$9. \quad a_3 = -\frac{a_1\,\varphi_3}{\varphi_2}\left(1 + \frac{\varphi_2}{d}\right) = -\frac{a\,\varphi_1\,\varphi_3}{\varphi_0\,\varphi_2}\left(1 + \frac{\varphi_2}{d}\right).$$

Die hier gemachte Annahme, dass F_3 mit H_2' zusammenfalle, ist den gewöhnlichen Verhältnissen hinlänglich entsprechend, nachdem vermöge des Accommodationsvermögens des Auges selbst Verschiedenheiten der Stellung desselben gegen das Ocular bis zu 10 *mm* von geringem Einflusse sind; eigentlich wäre es zur Erzielung der grösstmöglichsten Helligkeit das correcteste, die Pupille an den Ort des durch das Ocular und die vor der Pupille befindlichen Augenmedien vom

Digitized by Google

Objective entworfenen Bildes zu versetzen; eine solche Stellung des Auges würde jedoch sehr complicirte Formeln nothwendig machen, ohne dass der Gewinn an Helligkeit ein irgendwie nennenswerther wäre; berücksichtigt man, dass im Auge vor der Pupille die Hornhaut (Cornea) und die wässerige Flüssigkeit sich befinden, welche zusammen eine Concavconvexlinse mit den Brennweiten $\varphi_x = 19\ mm$; $\varphi_x' = 28\ mm$ bilden, deren beide Hauptpunkte zusammenfallen und $3{\cdot}5\ mm$ vor der Pupille oder $2{\cdot}5\ mm$ vor der rückwärtigen, $2{\cdot}1\ mm$ vor der vorderen Hauptebene des Auges liegen, so würde für die Normalwerthe, welche an einer späteren Stelle (§. 35) gewonnen werden, die Entfernung d_{23} anstatt gleich $\varphi_3 = 15$ etwa gleich $50\ mm$ zu sein haben, eine Distanz, deren Grösse mancherlei anderweitige Unzukömmlichkeiten mit sich bringen würde; hingegen lässt sich — wenigstens für die gewöhnlich angewendeten Ocularbrennweiten φ_2 von 15—30 mm — eine Stellung des Auges angeben, welche zwischen jenen beiden liegt und noch wesentlich einfachere Formeln bedingt, als nach der obigen Annahme $d_{23} = \varphi_3$ erhalten werden; es ist die Stellung, bei welcher $d_{23} = \varphi_2$, also der rückwärtige Brennpunkt des Oculares mit dem vorderen Hauptpunkte des Auges zusammenfällt; während nämlich für $d_{23} = 50\ mm$ das Bild des Objectives (oder vielmehr des Collectives siehe §. 34) in die Ebene der Pupille fällt, fällt es für $d_{23} = \varphi_3$ um $14{\cdot}9\ mm$, für $d_{23} = \varphi_2$ um $13{\cdot}3\ mm$ hinter dieselbe; wir können deshalb für alle Oculare von nicht zu grosser Brennweite die Annahme $d_{23} = \varphi_2$ machen; wir bekommen dadurch Formeln, welche wir zum Unterschiede von denjenigen der Annahme $d_{23} = \varphi_3$ mit lateinischen Ziffern bezeichnen wollen; und zwar wird in der Ableitung der Formel 8. wie früher $h_3 = \Delta$, dagegen $h_2' = H_2'G_2' = H_2'G_3 = H_2'H_3 + H_3G_3 = \varphi_2 - \Delta$, somit

$$\text{VIII.}\quad F_1'H_2 = h_2 = G_2H_2 = \frac{(\varphi_2 - \Delta)\varphi_2}{\varphi_2 - \Delta - \varphi_2} = \varphi_2\frac{\Delta - \varphi_2}{\Delta}.$$

Zur Bestimmung der Bildgrössen wird nunmehr

$$h_2 = \varphi_2\frac{\Delta - \varphi_2}{\Delta};\quad h_2' = \varphi_2 - \Delta;\quad h_3 = \Delta;\quad h_3' = \frac{\Delta\varphi_3'}{d}.$$

$$\beta_2 = a_1;\quad \beta_2' = \frac{\beta_2}{\varphi_2'}(\varphi_2' - h_2') = \frac{a_1}{\varphi_2}\Delta = \beta_3;$$

$$\beta_3' = \frac{\beta_3}{\varphi_3'}(\varphi_3' - h_3') = \frac{a_1}{\varphi_2}\Delta\left(1 - \frac{h_3'}{\varphi_2'}\right) = \frac{a_1}{\varphi_2}\Delta\frac{\Delta - \varphi_3 - \Delta}{d} = -\frac{a_1\varphi_3}{\varphi_2}\frac{\Delta}{d},$$

Digitized by Google

somit die Doppelgleichung

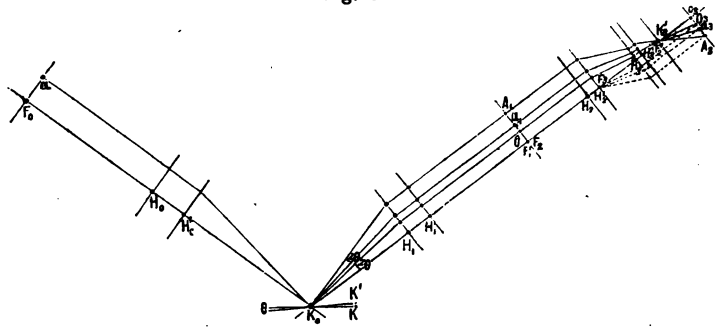
$$\text{IX.} \quad a_3 = -\frac{a_1}{\varphi_2}\frac{\varphi_3 \Delta}{d} = -\frac{a\varphi_1}{\varphi_0 \varphi_2}\frac{\varphi_3 \Delta}{d},$$

welche sehr übersichtlich ist, weil die vom Goniometer abhängigen Grössen vollständig von den nur auf das Auge bezüglichen getrennt sind, welche letzteren nur den Factor $\frac{\varphi_3 \Delta}{d} = 15\frac{180}{165} = 16 \cdot 36$ liefern.

Die Gleichung 9 oder IX. bestimmt auf der Retina den Abstand des Bildes des Fadenkreuzpunktes a von der optischen Axe. Für $a = 0$ erhalten wir das Bild der Fadenkreuzmitte, wofür natürlicherweise $a_3 = 0$ und $a_1 = 0$, also die Bilder der Fadenkreuzmitten zusammenfallend mit dem Orte der optischen Axe des Beobachtungsfernrohres auf der Retina.

20. Drehung der spiegelnden Krystallfläche. Empfindlichkeit. Wird der Krystall bei feststehenden Fernrohren um einen Winkel θ (Fig. 11 [1]) aus der vorigen Lage um eine zur

Fig. 11.



Reflexionsebene senkrechte Axe gedreht (nach K'), so erfährt jeder reflectirte Strahl eine gleichsinnige Drehung um den doppelten Winkel 2θ; während also der von a parallel der Axe einfallende Strahl nach der Brechung im Einlassobjective gegen die Axe wie zuvor unter einem Winkel δ geneigt bleibt, bildet

[1]) Der Einfachheit wegen wurden F_0' und F_1' in denselben Punkt der spiegelnden Fläche gelegt, was ohne Einfluss auf die Lage der Bilder in a_1 und a_3 ist; ferner wurde, jedoch nur in der Zeichnung, der Fall des auf ∞ eingestellten Auges angenommen, während in den Formeln die deutliche Sehweite Δ berücksichtigt ist.

Digitized by Google

der ausfahrende Strahl mit der Axe des Beobachtungsfernrohres einen Winkel $\delta + 2\,\theta$; es bestehen deshalb nunmehr die Gleichungen

$$\frac{a}{\varphi_0} = tg\,\delta \text{ und } tg\,(\delta + 2\,\theta) = \frac{A_1}{\varphi_1},$$

hingegen ist wie vorher A_3 mit A_1 durch die Relation verbunden:

$$A_3 = -\frac{A_1}{\varphi_2} \cdot \frac{\varphi_3\,(\varphi_2 + d)}{d},$$

beziehungsweise (für die andere Stellung des Auges):

$$A_3 = -\frac{A_1\,\varphi_3}{\varphi_1}\frac{\Delta}{d},$$

worin A_1 und A_3 die Orte der Bilder von a in der Ebene des zweiten Fadenkreuzes und auf der Retina nach erfolgter Drehung des Krystalles bedeuten.

Hieraus wird durch Elimination von δ, wegen $tg\,(\delta + 2\,\theta) = \frac{tg\,\delta + tg\,2\,\theta}{1 - tg\,\delta\,tg\,2\,\theta}$, wenn $tg\,2\,\theta = t$ gesetzt wird,

$$10.\quad A_1 = \frac{a + \varphi_0\,t}{\varphi_0 - a\,t}\,\varphi_1;\quad A_3 = -\frac{a + \varphi_0\,t}{\varphi_0 - a\,t}\,\frac{\varphi_1\,\varphi_3}{\varphi_2}\left(1 + \frac{\varphi_2}{d}\right)$$

und für die andere Stellung des Auges

$$X.\quad A_1 = \frac{a + \varphi_0\,t}{\varphi_0 - a\,t}\,\varphi_1;\quad A_3 = -\frac{a + \varphi_0\,t}{\varphi_0 - a\,t}\,\frac{\varphi_1\,\varphi_3}{\varphi_2}\,\frac{\Delta}{d}.$$

Setzen wir in den beiden Gleichungen 10. und X. $a = 0$, so geben uns dieselben die Punkte O_1 im Beobachtungsfadenkreuz und O_3 auf der Retina, in welche das Bild der Fadenkreuzmitte des Einlassfernrohres nach der Drehung des Krystalles fällt:

$$11.\quad O_1 = \varphi_1\,t;\quad O_3 = -\frac{\varphi_1\,\varphi_3}{\varphi_2}\,t\left(1 + \frac{\varphi_2}{d}\right) \text{ und}$$

$$XI.\quad O_1 = \varphi_1\,t;\quad O_3 = -\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\,t\,\frac{\varphi_3\,\Delta}{d},$$

wobei durch a, A und O so wie früher, sowohl die betreffenden Orte, als auch ihre Entfernungen von der optischen Axe bezeichnet werden; die Grösse O_3 gibt die dem Winkel θ entsprechende Empfindlichkeit des Goniometers an, weshalb wir den Quotienten $\frac{O_3}{tg\,2\,\theta} = \frac{O_3}{t}$, als das Mass der Empfindlichkeit des Goniometers künftighin mit dem Buchstaben ω bezeichnen wollen; es ist:

$$12.\quad \omega = \frac{O_3}{t} = -\frac{\varphi_1\,\varphi_3}{\varphi_2}\left(1 + \frac{\varphi_2}{d}\right) \text{ und}$$

$$XII.\quad \omega = -\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\,\varphi_3\,\frac{\Delta}{d}.$$

Digitized by Google

21. Gesichtsfeld in Bildgrössen- und angularem Masse. Das Gesichtsfeld ist begrenzt durch die in deutlicher Sehweite erscheinenden Ränder der zweiten Fadenkreuzblendung; ist s_1 der Radius dieser (kreisförmigen) Blendung, so finden wir die Grösse s_3 seines Bildes auf der Retina, wenn wir in Gleichungen 9. und IX. a_1 durch s_1, a_3 durch s_3 ersetzen; das Doppelte dieses Radius gibt den Durchmesser S des Gesichtsfeldes, dessen negatives Zeichen andeutet, dass das Bild von s_1 ein verkehrtes ist;

$$13. \quad S = 2\,s_3 = -\frac{2\,s_1\,\varphi_3}{\varphi_2}\left(1+\frac{\varphi_2}{d}\right),$$

beziehungsweise

$$\text{XIII.} \quad S = -\frac{2\,s_1\,\varphi_3}{\varphi_2}\,\frac{\Delta}{d}.$$

Wir können aber auch eine angulare Grösse des Gesichtsfeldes bestimmen, das ist den Winkel Θ, um den die spiegelnde Fläche gedreht werden muss, damit das Bild eines Punktes vom Einlassfadenkreuze den ganzen Durchmesser des Gesichtsfeldes durchlaufe; soll etwa das Bild der Mitte des Einlassfadenkreuzes vom unteren bis zum oberen Rande des Gesichtsfeldes wandern, so muss die Verschiebung O_3 der Breite des Gesichtsfeldes S gleich werden; also:

$$O_3 = -\frac{\varphi_1\,\varphi_3}{\varphi_2}\,tg\,2\,\Theta\left(1+\frac{\varphi_2}{d}\right) = S = -\frac{2\,s_1\,\varphi_3}{\varphi_2}\left(1+\frac{\varphi_2}{d}\right),$$

oder:

$$\text{14. und XIV.} \quad tg\,2\,\Theta = \frac{2\,s_1}{\varphi_1}.$$

22. Lichtscheibe. Bild- und angulare Grösse. In diesem eben ermittelten Gesichtsfelde erscheint das Bild r_3 des Radius r der Blendung des Einlassfadenkreuzes, dessen Durchmesser in Bildgrösse gemessen, wir ebenfalls aus den Gleichungen 9. und IX. durch die Substitution r für a, r_3 für a_3 erhalten:

$$15. \quad R = 2\,r_3 = -\frac{2\,r\,\varphi_1\,\varphi_3}{\varphi_0\,\varphi_2}\left(1+\frac{\varphi_2}{d}\right) \text{ und}$$

$$\text{XV.} \quad R = -\frac{2\,r\,\varphi_1\,\varphi_3}{\varphi_0\,\varphi_2}\,\frac{\Delta}{d}.$$

Die angulare Grösse des Lichtbildes Ξ ist dann wieder der Winkel, um den der Krystall gedreht werden muss, damit der untere Rand des Lichtbildes an derjenigen Stelle der Netz-

Digitized by Google

haut abgebildet werde, an welcher vorher das Bild des oberen Randes gestanden hatte; es muss also sein:

$$0_3 = -\frac{\varphi_1 \varphi_3}{\varphi_2} tg\, 2\,\Xi \left(1 + \frac{\varphi_2}{d}\right) = R = -\frac{2\,r\,\varphi_1 \varphi_3}{\varphi_0 \varphi_2}\left(1 + \frac{\varphi_2}{d}\right)$$

oder

$$16.\text{ und XVI.}\quad tg\, 2\,\Xi = \frac{2\,r}{\varphi_0}.$$

Der in den Formeln 9. bis 13. und 15. auftretende Factor $1 + \frac{\varphi_2}{d}$ bedeutet die Correction wegen der deutlichen Sehweite; er wird der Einheit gleich, wenn die Sehweite unendlich gross wird, und kann daher, wo es sich um genäherte Formeln zur übersichtlichen Dimension handelt, weggelassen werden; in den analogen Formeln IX. bis XIII. und XV. ist er gleich $\frac{\Delta}{d}$ oder $\frac{12}{11}$.

23. Scheinbare Bildgrössen. Ausser der wirklichen Bildgrösse auf der Retina kommt auch die Grösse in Betracht, in welcher ein Bild dem Auge erscheint; das ist aber nichts anderes als die Grösse, die es vor der Brechung im Auge besass, weil ja das Beobachtungsocular so gestellt wird, dass die von ihm entworfenen Bilder in Sehweite vor dem Auge stehen. Diese Bildgrösse ist $(a_3) = -\frac{a_2}{\varphi_3} d$ (also unter der früheren Annahme von $\Delta = 180 : (a_3) = 11\, a_3$), und ebenso werden alle übrigen Grössen auf der Retina durch Multiplication mit $-\frac{d}{\varphi_3}$ in die scheinbaren (in runder Klammer) umgewandelt.

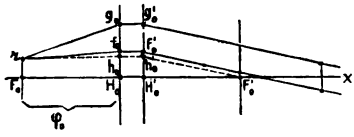
$$17.\quad \begin{cases} (a_3) = \frac{a\,\varphi_1}{\varphi_0}\left(1 + \frac{d}{\varphi_2}\right) \\ (S) = 2\,s_1\left(1 + \frac{d}{\varphi_2}\right) \\ (R) = 2\,\frac{r\,\varphi_1}{\varphi_0}\left(1 + \frac{d}{\varphi_2}\right) \\ (A_3) = \varphi_1\,\frac{a + t\,\varphi_0}{\varphi_0 - a t}\left(1 + \frac{d}{\varphi_2}\right) \\ (0_3) = \varphi_1\, t\left(1 + \frac{d}{\varphi_2}\right). \end{cases} \qquad \text{XVII.} \begin{cases} (a_3) = \frac{a\,\varphi_1}{\varphi_0\,\varphi_2}\,\Delta \\ (S) = \frac{2\,s_1}{\varphi_2}\,\Delta \\ (R) = \frac{2\,r\,\varphi_1}{\varphi_0\,\varphi_2}\,\Delta \\ (A_3) = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}\,\frac{a + t\varphi_0}{\varphi_0 - a t}\,\Delta \\ (O_3) = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}\, t\,\Delta \end{cases}$$

24. Lichtmenge und Helligkeit. Steht die Lichtquelle unmittelbar vor der ersten Fadenkreuzblendung $(a,\ r,\ F_0)$, so

Digitized by Google

kann diese als selbstleuchtend angesehen werden. Ist r (Fig. 12) der Radius der im vorderen Brennpunkte F_0 des Einlassobjectives stehenden Blendung, ξ der Radius der kreisförmig und senkrecht zur optischen Axe des Einlassfernrohres gedachten, irgendwo in der Axe stehenden Krystallfläche X[1]), so ist die Gesammtheit der von dem Punkte r auf die ganze Fläche X fallenden Lichtstrahlen in dem Kegel enthalten, dessen Schnitt mit der Ebene der Zeichnung das Dreieck $r f_0 g_0$ ist, dessen Construction mittelst des Hilfsstrahles $r h_0$ von r parallel der Axe leicht aus der Figur ersichtlich ist.

Fig. 12.



Ist i_0 die Intensität der in der Einlassapertur gedachten Lichtquelle, so sendet ein jeder Punkt dieser Apertur die Lichtmenge $4\pi i_0$ aus, welche sich nach Ablauf einer gewissen Zeit über die Oberfläche einer Kugel vom Radius φ_0 verbreitet haben wird; construiren wir nun aus r mit dem Radius φ_0 eine Kugel (indem wir den Abstand $\frac{r f_0 + r g_0}{2} = r h_0$ annehmen, eine durchaus gestattete Näherung), so verhält sich die von r nach $f_0 g_0$ gelangende Lichtmenge I_r zu der gesammten Lichtmenge in der Kugeloberfläche, also zu $4\pi i_0$, wie sich der Flächeninhalt des Kreises von dem Durchmesser $f_0 g_0 = 2\xi$ zur Oberfläche der Kugel vom Radius φ_0 verhält, also: $I_r = \frac{4\pi i_0 \xi^2 \pi}{4 \varphi_0^2 \pi} = \frac{i_0 \xi^2 \pi}{\varphi_0^2}$; und da unter der angenommenen Voraussetzung diese Lichtmenge für alle Elemente der leuchtenden Fläche dieselbe wird (weil ihr Abstand von der Hauptebene in H_0 constant angenommen ist), so ist die gesammte,

---

[1]) Weil das von einem Punkte F_0 oder a kommende, an einer Fläche X gespiegelte Licht sich so fortbewegt, als käme es direct von einem jenseits der Fläche X symmetrisch mit F_0 oder a gelegenen Punkte, welcher somit auf dem von F_0 oder a zur — eventuell vergrösserten — Fläche X gezogenen Lothe, und zwar ebenso weit jenseits, wie F_0 oder a diesseits, liegt, so kann man einfachheitshalber die gespiegelten Strahlen immer als durchgelassene zeichnen, wie es in Fig. 12 und den folgenden Figuren 13 bis 15 geschehen ist.

Digitized by Google

von der Fadenkreuzblendung auf den Krystall gelangende Lichtmenge I gleich I_r mal dem Flächeninhalte der Blendung, also

$$I = I_r r^2 \pi = \frac{i_0 r^2 \pi \xi^2 \pi}{\varphi_0^2}.$$

Steht die Krystallfläche nicht, wie in Fig. 12, senkrecht zur optischen Axe des Objectives, so reducirt sich, wie leicht einzusehen, der Querschnitt des wirksamen Strahlencylinders auf $\xi^2 \pi \cos \varkappa$, wenn $\varkappa$ der Einfallswinkel, das ist der Winkel der optischen Axe des Fernrohres mit der Normalen der Krystallfläche ist, und es wird die Lichtmenge

$$18. \quad I = \frac{i_0 r^2 \pi \xi^2 \pi \cos \varkappa}{\varphi_0^2} = \frac{i_0 r^2 \pi \chi}{\varphi_0^2},$$

worin χ den Flächeninhalt der Projection der Krystallfläche bedeutet.

Dieselbe Lichtmenge gelangt ins Auge unter der Voraussetzung, dass bei Brechung und Reflexion kein Lichtverlust eintritt, und dass alle brechenden Linsenflächen, genügende Apertur haben, um das vom Krystall gespiegelte Strahlenbündel durchzulassen, welches letztere jederzeit vorausgesetzt werden darf, während die erstere Vernachlässigung wenigstens keine Veränderung in den Formeln bedingt und deshalb ebenfalls gesetzt werden darf. Die relative Helligkeit ist die auf die Flächeneinheit des Netzhautbildes entfallende Lichtmenge, somit, wenn r_3 der Radius des letzteren, nach 15. und XV.:

$$19. \quad i = \frac{I}{r_3^2 \pi} = \frac{i_0 \chi \varphi_2^2 d^2}{\varphi_1^2 \varphi_3^2 (\varphi_2 + d)^2}, \text{ und}$$

$$\text{XIX.} \quad i = \frac{i_0 \chi \varphi_2^2 d^2}{\varphi_1^2 \varphi_3^2 \Delta^2}.$$

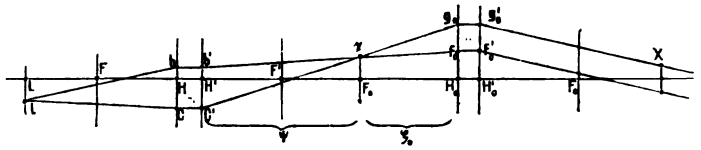
25. Einlassocular und Helligkeit. Es ist versucht worden[1]), die Helligkeit des Netzhautbildes durch eine vor dem Einlassobjective angebrachte Sammellinse zu verstärken, durch welche ein verkleinertes Bild der Lichtquelle auf der Ebene der ersten Fadenkreuzblendung entworfen wird. Es soll nun untersucht werden, inwiefern eine solche Verstärkung der Helligkeit möglich ist. Sei wie vorhin in Fig. 13. rf_0g_0 der Längsschnitt des

[1]) Websky, Zeitschr. f. Kryst. Bd. 4, S. 547. 1880 und Liebisch, Bericht üb. d. wiss. Instrum. a. d. Berliner Gewerbe-Ausstellung. Berlin, 1880, S. 327.

Digitized by Google

Kegels, der die Gesammtheit der vom äussersten Punkte r der Blendung auf den Krystall in X fallenden Lichtstrahlen enthält, und ist laut Annahme der Ort der Lichtquelle in L mit der

Fig. 13.



Blendung in F_0 bezüglich des Einlassoculares (dessen Haupt- und Brennpunkte $FHH'F'$ seien) conjugirt (in diesem Falle entsteht nämlich ein scharfes Bild der Lichtquelle in der Ebene der Fadenkreuzblendung), so gibt der mit dem Punkte r conjugirte Punkt l den äussersten Punkt der Lichtquelle, welcher noch im Stande ist, vermöge der Apertur der Blendung in r Licht auf den Krystall zu senden; und weil alle durch r gehenden Strahlen auch durch l hindurchgehen müssen (weil r und l conjugirt sind), so enthält der Strahlenkegel, dessen Schnitt mit der Zeichenebene lbc ist, auch die Gesammtheit der von l zum Krystall gelangenden Strahlen. Wird wieder $c'r = b'r = H'F_0$; $rf_0 = rg_0 = F_0H_0$ angenommen, so folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $rb'c'$ und rf_0g_0 der Durchmesser der Kegelbasis

$$bc = b'c' = \frac{f_0g_0 \cdot H'F_0}{F_0H_0} = \frac{2\xi\psi}{\varphi_0},$$

wenn wir $H'F_0$ mit ψ bezeichnen; nun ist, wie vorhin, die von l auf bc fallende Lichtmenge I_l:

$$I_l = \frac{i_0\left(\frac{bc}{2}\right)^2\pi}{(LH)^2}.$$

Weil L mit F_0 bezüglich des Oculares conjugirt ist, ergibt sich LH nach den Formeln 2. — wenn φ die Brennweite des Oculares bedeutet — zu:

$$LH = \frac{\varphi\psi}{\psi - \varphi}.$$

Wird dieser Werth und der oben für bc gefundene in die Gleichung I_l eingesetzt, so bekommen wir:

$$I_l = \frac{i_0\xi^2\psi^2\pi(\psi-\varphi)^2}{\varphi_0^2\varphi^2\psi^2} = \frac{i_0\xi^2\pi(\psi-\varphi)^2}{\varphi_0^2\varphi^2}$$

Digitized by Google